CBS
Colegio Bautista Shalom

Matemática 1
Primero Básico
Segundo Bimestre

Contenidos

LÓGICA MATEMÁTICA

- ✓ INDUCCIÓN – DEDUCCIÓN.
- ✓ PROPOSICIÓN O ENUNCIADO.
    - PROPOSICIÓN SIMPLE.
    - PROPOSICIONES ABIERTAS (O FUNCIÓN PROPOSICIONAL).
    - ENUNCIADOS QUE NO SON PROPOSICIONES.
- ✓ VALOR DE VERDAD.
  - CONSTRUCCIÓN DE TABLAS DE VERDAD.
- ✓ PROPOSICIÓN COMPUESTA.
- ✓ NEGACIÓN DE UNA PROPOSICION.
- ✓ NEGACIÓN DE DESIGUALDADES.
- ✓ UTILIZACIÓN DE LOS CONECTIVOS LÓGICOS.
  - CONDICIÓN DE VERDAD DEL NEGADOR.
  - CONDICIÓN DE VERDAD DEL CONJUNTOR.
  - CONDICIONES DE VERDAD DE LA DISYUNCIÓN.
  - CONDICIONES DE VERDAD DEL CONDICIONAL.
  - CONDICIONES DE VERDAD DEL BICONDICIONAL (CO-IMPLICADOR).

CUANTIFICADORES

- ✓ DECLARACIONES CUANTIFICADAS.
- ✓ PROPOSICIONES Y CUANTIFICADORES.

LOS CONJUNTOS

- ✓ CONJUNTO.
- ✓ REPRESENTACIÓN DE LOS CONJUNTOS.
- ✓ DIAGRAMA DE VENN.
- ✓ ENUMERACIÓN DE LOS COJUNTOS.
- ✓ REPRESENTACIÓN LITERAL.
- ✓ TIPOS DE CONJUNTOS.
- ✓ OPERACIONES DE CONJUNTOS.

VARIABLES

- ✓ DEFINICIÓN APROPIADA DE UNA VARIABLE.
- ✓ VARIABLES CUANTITATIVAS Y CUALITATIVAS.

RELACIOENES

- ✓ UN PAR ORDENADO.
- ✓ PROPIEDADES DEL PAR ORDENADO.
- ✓ PRODUCTO CARTESIANO.
    - PROPIEDADES DEL PRODUCTO CARTESIANO.
    - REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL PRODUCTO CARTESIANO.
    - DIAGRAMAS SAGITALES.
- ✓ RELACIÓN DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA E INVERSA.
- ✓ PROPORCIÓN.
    - PROPORCIONALIDAD DIRECTA.
    - GRÁFICO DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA.
    - PROPORCIONALIDAD INVERSA.
    - GRÁFICO DE PROPORCIONALIDAD INVERSA.

NOTA: conforme avances en tu aprendizaje, encontrarás ejercicios que debes realizar. Copia y resuelve cada ejercicio en hojas bond (blancas) a lápiz y escribe las respuestas con lapicero negro. Sigue las instrucciones de tu catedrático(a).

LÓGICA MATEMÁTICA

Es una variedad de la lógica filosófica. Podemos pensar a la lógica como el estudio del razonamiento correcto.

El razonamiento es el proceso de obtener conclusiones a partir de suposiciones o hechos.

El razonamiento correcto es el razonamiento en el que las conclusiones se siguen necesaria e inevitablemente de las suposiciones o hechos.

INDUCCIÓN – DEDUCCIÓN

Existen dos tipos básicos de razonamiento: el inductivo y el deductivo.

1. Si se acepta como válido un principio general, basándose en una serie de experiencias específicas o particulares, se está realizando un razonamiento inductivo.
2. Si, por el contrario, partiendo de una ley general cuya validez se conoce, se infiere la veracidad o falsedad de un caso en particular, se está efectuando un razonamiento deductivo.

PROPOSICIÓN O ENUNCIADO

Se define como proposición o enunciado a una oración declarativa carente de ambigüedad, que es verdadera o falsa, pero nunca las dos cosas simultáneamente.

Las proposiciones forman parte de la forma más simple o elemental de la lógica, enfocándose más en la lógica matemática. Durante el desarrollo de este tema observarás que, la lógica matemática no profundiza en los conceptos de las proposiciones, solo se guía en lo ciertas o falsas que sean.

Según las ciencias que estudian nuestro idioma, una proposición es una estructura semántica compuesta por dos más conceptos unidos entre sí a través de frases de enlace para crear unidades con significado (Novak & Gowin, 1984).

Como el propio término lo sugiere, una proposición propone o afirma algo, independientemente del valor de verdad ("cierto" o "falso") de lo propuesto.

Una proposición debe tener la cualidad de ser verdadera o falsa y una oración o concepto que no tiene uno u otro sentido no puede ser considerado como proposición lógica.

PROPOSICIÓN SIMPLE

Son llamadas proposiciones atómicas o elementales, son aquellas proposiciones que poseen un solo sujeto y un solo predicado. En estas se da una afirmación con el resultado implícito. No tienen oraciones componentes afectadas por negaciones ("no") o términos de enlace como conjunciones ("y"), disyunciones ("o") o implicaciones ("sí...entonces"). Pueden aparecer términos de enlace en el sujeto o en el predicado, pero no entre oraciones.

Por ejemplo:

a) Carlos Fuentes es un escritor.
b) El 14 y el 7 son factores del 42.
c) El 2 o el 3 son divisores de 48.

PROPOSICIONES ABIERTAS (O FUNCIÓN PROPOSICIONAL)

Proposiciones en donde el(los) sujeto(s) es incógnito. Se caracterizan por ser verdaderas para algunos sujetos y falsa para otros.

Por ejemplo. Sea x un sujeto definido en un conjunto incógnito y considere las expresiones matemáticas definidas para x que pueden considerarse como proposiciones abiertas.

a) $x+2=4$
b) $x^2-5x+6 = 0$
c) $x^2-9=(x-3)(x+3)$
d) $x^2=9$ y $x-1=0$

De las proposiciones anteriores se afirma que:

a) $x + 2 = 4$ es verdadera para $x= 2$ y falsa para otros valores de x.
b) $x^2 - 5x + 6 = 0$ es verdadera para $x = 2$ o $x = 3$, y falsa para otros valores de x.
c) $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ es verdadera para todo valor de x.
d) $x^2 = 9$ y $x - 1 = 0$ es falsa para todo valor de x.

ENUNCIADOS QUE NO SON PROPOSICIONES

Con base a la definición de proposición, los siguientes enunciados no son proposiciones:

a) Cómete la cena.
b) ¿A qué hora comienza la película que vamos a ver?
c) Maradona fue mejor jugador de futbol que Pelé.
d) Esta oración es falsa. No se puede determinar si estos enunciados son verdaderos o falsos.

El primero es una orden, el segundo es una pregunta y el tercero es una opinión.

El cuarto enunciado es una paradoja: "Esta oración es falsa". Si suponemos que es verdadero, entonces es falso y si suponemos que es falso, entonces es verdadero.

EJERCICIO 01. Escribe:

a. 20 enunciados que sean proposiciones simples.
b. 10 enunciados que no sean proposiciones.

VALOR DE VERDAD

Al hacer referencia al posible valor de verdad o falsedad que pueda tener una fórmula estamos admitiendo un principio, el principio de bivalencia: todo enunciado es o verdadero o falso, pero no ambas cosas a la vez.

El principio de bivalencia puede aplicarse tanto a las proposiciones atómicas como a las moleculares.

Si una proposición es verdadera, se dirá que tiene valor de verdad positivo; si es falsa; negativo. En este sentido, el criterio que se adopta para atribuir valor de verdad o falsedad a una proposición atómica, según Wittgenstein, no es tanto un problema de análisis lógico, sino un problema de experiencia.

Si lo enunciado en una proposición está conforme con los hechos, la proposición es verdadera, de lo contrario es falsa.

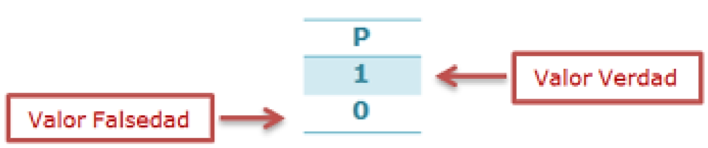
Un segundo principio de la lógica bivalente es, aquel que mantiene que el valor de verdad de las proposiciones moleculares depende del valor de verdad de las proposiciones atómicas que la forman. En este sentido podemos decir que las fórmulas moleculares son también funciones de verdad o funciones veritativas, ya que los valores que adoptan son valores de verdad.

El valor de verdad de una proposición molecular, independientemente de los valores de sus componentes, se determina por medio del procedimiento, elaborando las "Tablas de Verdad".

CONSTRUCCIÓN DE TABLAS DE VERDAD

Para construir las tablas de verdad hemos de tener en cuenta el número de filas con valor de verdad V = 1 y de falsedad F = 0, de los que ha de constar la tabla; el número de filas se rige por la siguiente formula 2^n, donde n = al número de variables proposicionales de la fórmula dada.

Conforme a lo anterior, para una sola variable p, la tabla sería $2^1 = 2$ filas, es decir:



Lo antes mencionado, se refiere al valor de verdad o falsedad de las variables que componen una fórmula. Pero, en las proposiciones moleculares, estas variables van unidas por conectivas; las cuales al relacionar los valores de las variables producen un resultado o función.

PROPOSICIÓN COMPUESTA

También llamadas proposiciones moleculares o coligativas. Se denomina así a aquellas que están constituidas por dos o más proposiciones simples.

Estas proposiciones simples están unidas a través de conectivos lógicos.

En lógica, las palabras que se usan para relacionar proposiciones simples y formar compuestas, se le conocen como conectivos lógicos (así como los conectivos normales que usamos en los enunciados).

CONECTIVO LÓGICO
y
o
O .... o ....
Si .... entonces .....
si y solo si
no

A continuación, observa los siguientes ejemplos:

a) Si Alejandro Toledo ganó las elecciones entonces será el próximo presidente del Perú.

b) $2^3 + 3^2 = 17$ si y solo si $24 \div 2^3 = 12$

c) La bomba atómica explotó en Hiroshima en 1945 pero Bogotá es la capital de Colombia.

Tratemos de identificar si los siguientes enunciados son proposiciones compuestas o no:

a) Leo la Prensa Libre y Nuestro Diario.

Es una proposición compuesta. Las proposiciones simples que la componen son: Leo la Prensa Libre. Leo Nuestro Diario. Ambas están unidas por el conectivo "y".

b) Juan o Silvia me ayudarán con la tarea de inglés.

Es una proposición compuesta. Las proposiciones simples que la componen son: Juan me ayudará con la tarea de inglés. Silvia me ayudará con la tarea de inglés. Ambas están unidas por el conectivo "o".

c) A mi sobrino le gusta el cuento de Hansel y Gretel.

Es una proposición simple. En este caso la palabra "y" se utiliza para unir los nombres de los protagonistas de este famoso cuento para niños, no para unir dos proposiciones simples.

d) Si estudias bastante, entonces aprobarás el curso.

Es una proposición compuesta. Las proposiciones simples que la componen son: Tú estudias bastante. Tú aprobarás el curso. Unidas por el conectivo "si…, entonces…"

e) Hoy no es martes.

Aunque esta proposición no consta de más de un componente, debe considerarse una proposición compuesta. Recordemos que definimos como proposición a una declaración afirmativa, que es falsa o verdadera.

La proposición simple de este ejemplo es: Hoy es martes. Y es modificada por el conectivo "no". La proposición "Hoy no es martes" es la negación de "Hoy es martes".

EJERCICIO 02. Escribe 10 enunciados que sean proposiciones simples y 10 compuestas.

NEGACIÓN DE UNA PROPOSICION

Observa que la característica fundamental de la negación es que cambia el valor de verdad de la proposición original; es decir, si la proposición original es verdadera, su negación será falsa y si la proposición original es falsa, su negación será verdadera.

Normalmente, para negar una proposición simple basta con introducir la palabra “no”:

El sol es una estrella.

Negación: El sol no es una estrella.

Algunas veces se podrá utilizar el antónimo de una palabra para formar la negación de una proposición, por ejemplo:

Es de día.

Negación: No es de día. Que sería equivalente a decir:

Es de noche.

El uso del antónimo no siempre es correcto para formar la negación de una proposición, como lo ilustra el siguiente ejemplo:

Carlos tiene un carro negro.

Es incorrecto negarlo diciendo: Carlos tiene un carro blanco.

La negación correcta es: “Carlos no tiene un carro negro” o “Es falso que Carlos tenga un carro negro” o “No es cierto que Carlos tiene un carro negro”.

Porque para cambiar el valor de verdad de la proposición original, basta con que Carlos tenga un carro de cualquier color que no sea negro, o que no tenga carro.

EJERCICIO 03: escribe la negación de las siguientes proposiciones.

1. La camioneta es de color azul:
2. El carro es de color rojo:
3. No está soleado el día:
4. El almuerzo estuvo sabroso:
5. Un día nublado:
6. Juan y Juana están dormidos:
7. Es mi computadora:
8. Don Pablo no es trabajador:
9. Ana está estudiando.
10. Mauricio es un buen vendedor:

NEGACIÓN DE DESIGUALDADES

Para negar una desigualdad no utilice una diagonal sobre el signo de comparación. Es decir, la negación de $m > 5$ no se acepta como $m \not> 5$.

La negación de “m es mayor que 5” es “m no es mayor que 5”, eso significa que m debe ser menor o igual que 5:

$$m \leq 5$$

De forma similar, dada la desigualdad: $c \leq 17$ (c es menor o igual que 17), su negación implica decir que c no es menor ni igual que 17, entonces, c solamente puede ser mayor que 17:

$$c > 17$$

EJERCICIO 04: escribe la negación para cada desigualdad. No debes de utilizar una diagonal sobre el símbolo.

1. $y > 12$: $y \leq 2$ **2.** $x < -6$: $x \geq -6$ **3.** $q \geq 5$: $q < 5$ **4.** $t \leq 19$: $t > 19$ **5.** $a < 23$: $a \geq 23$

UTILIZACIÓN DE LOS CONECTIVOS LÓGICOS

Partiendo de los conectores u operaciones lógicos, es posible formar proposiciones compuestas (formadas por varias proposiciones simples y conectadas entre sí por los conectores lógicos), sin embargo los criterios de verdad resultantes de los operadores lógicos están regidos por determinadas reglas de la lógica booleana. Pero, para ser más preciso es necesario tener en cuenta que las proposiciones simples están determinadas por condiciones dialécticas de tiempo y espacio. Por ejemplo si se señala "llueve y no tengo paraguas", al construir la tabla de verdad es necesario resolver ¿en dónde? y ¿cuándo?

La afirmación "llueve" se entiende en que es en ese momento y ese lugar y con una simple mirada al cielo sabemos si es cierto o falso. Hechas estas observaciones pasamos a revisar las reglas específicas que rigen a cada conector lógico.

La lógica booleana es una lógica de conjuntos y nos sirve, principalmente, para definir formas de intersección entre conjuntos.

En este caso, los conjuntos serian lo que quedan definidos por una palabra, es decir, serian conjuntos definidos por intensión.

CONDICIÓN DE VERDAD DEL NEGADOR

Cuando una enunciado es verdadero (valor de verdad positivo), su negación es falsa (valor de verdad negativo), y a la inversa. Las condiciones de verdad de la negación se pueden representar de la siguiente manera:

p	¬p
1	0
0	1

CONDICIÓN DE VERDAD DEL CONJUNTOR

Podríamos unir dos enunciados cualesquiera mediante la cópula "y": p = llueve q = hace frío; mediante símbolos: $p \wedge q$. Al igual que sucede en el lenguaje ordinario una conjunción es verdadera cuando lo son los dos enunciados que la forman, y falsa en todos los demás casos.

p	q	p^q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Puede suceder que en la conjunción alguno de sus miembros esté negado, en este caso es necesario añadir el valor de verdad del miembro que esté negado.

Los valores, en este caso, de $\neg q$ son los contrarios de q.

p	q	¬q
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	1

Además, en una conjunción podemos añadir más enunciados.

Tres por ejemplo: $p \wedge q \wedge r$. En ese caso es verdadera si los son los tres enunciados que la forman.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

CONDICIONES DE VERDAD DE LA DISYUNCIÓN

Podemos unir dos enunciados en el lenguaje ordinario con la partícula ***o:*** p o q, con símbolos: $p \vee q$. Se la denomina ***suma lógica***. El significado del disyuntor es el siguiente: la disyunción es verdadera cuando al menos uno de los enunciados que la forman es verdadero, falsa los enunciados que la forman son falsos a la vez.

Las condiciones de verdad de la disyunción son la imagen invertida de la conjunción. Para comprobar la verdad de una disyunción es suficiente con probar la verdad de uno de sus enunciados; para probar su falsedad es necesario comprobar que son falsos los dos enunciados que la forman.

p	q	p∨q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

En el leguaje ordinario hay dos usos: uso exclusivo y el uso inclusivo.

El uso exclusivo, no permite que los enunciados sean verdaderos al mismo tiempo; por ejemplo: cuando un juez pregunta al acusado si es culpable o inocente.

El uso inclusivo, permite que una de las opciones sea falsa; por ejemplo: para aprobar lógica hay que hacer el examen o presentar un trabajo.

CONDICIONES DE VERDAD DEL CONDICIONAL

El símbolo → recibe el nombre de implicador o condicional; y es la formalización, parcial e incompleta de la partícula del lenguaje ordinario "si...entonces".

La expresión que precede a la implicación se llama antecedente, la que le sucede, consecuente.

Una proposición condicional es verdadera en todos los casos, salvo que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso.

p	q	p→q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Es verdadero cuando empieza con una verdad y termina con una verdad, "si es de día es de día"; es verdadero si comienza con una falsedad y termina con una falsedad, "si la tierra vuela, la tierra tiene alas"; y es verdadero también, si comienza con una falsedad y termina con una verdad, "si la tierra vuela, la tierra existe". Y es falso, si comienza con una verdad y termina con una falsedad, "si es de día, es de noche".

La tabla del condicional ha sido muy discutida, esta que se expone aquí es la definición de condicional material, en la que no se requiere ninguna relación de contenido entre antecedente y consecuente. Sino sólo el valor de verdad de sus componentes, a este criterio se llama: *extensional*.

CONDICIONES DE VERDAD DEL BICONDICIONAL (CO-IMPLICADOR)

En el lenguaje matemático no formalizado es frecuente el uso de la partícula ***"si y solo si", "cuando y solamente cuando", y "equivalente".***

Fundamentalmente cuando se hacen definiciones. La partícula que se utiliza para formalizar es ↔.

p	q	p↔q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Un bicondicional es verdadero cuando su antecedente y consecuente son a la vez verdaderos o son falsos; y falso en los demás casos. Suponga que p es falsa, q es verdadera y r es falsa ¿Cuál es el valor de verdad de la proposición compuesta $\sim p \wedge (q \vee \sim r)$?

Para resolver este ejercicio, primero sustituimos cada proposición simple por su correspondiente valor de verdad, luego se operan las proposiciones agrupadas entre paréntesis y finalmente se encuentra el valor de verdad de la proposición compuesta original (imagen derecha).

$$\sim p \wedge (q \vee \sim r)$$
$$\sim F \wedge (V \vee \sim F)$$
$$V \wedge (V \vee V)$$
$$V \wedge V$$
$$V$$

La letra *V* en el último renglón indica que la proposición original es verdadera.

En el ejemplo siguiente se crea una tabla de verdad completa, tomando en consideración todas las posibles combinaciones de valores de verdad para las proposiciones que la componen.

Elabora una tabla de verdad para: $(\sim p \wedge q) \vee \sim q$. Comienza por listar todas las posibles combinaciones de valores de verdad para p y q. Después, escriba los valores de verdad de ~p.

p	q	$\sim p$
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Solamente debes de utilizar la columna de ~ p y q y aplicar la tabla de verdad de la conjunción para determinar los valores de verdad de ~ p ^ q.

Escríbelos en una columna aparte, como se te muestra a continuación:

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

Luego, incluye una columna para ~q.

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$\sim q$
V	V	F	F	F
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	V

Por último, debes de agregar una columna para la proposición compuesta entera. Aplica la tabla de verdad de la disyunción para combinar ~ p ^ q con ~q

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$\sim q$	$(\sim p \wedge q) \vee \sim q$
V	V	F	F	F	F
V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	V
F	F	V	F	V	V

EJERCICIO 05. Realiza lo siguiente.

1. Con la ayuda de tu catedrático/a, simbólicamente expresa los siguientes enunciados:

   a) "Si el testigo no dice la verdad, entonces Juan es inocente o culpable"

   Luego:
   p: El testigo dice la verdad
   ~p: El testigo dice la verdad
   q: Juan es inocente
   r: Juan es culpable.

   b) "No es el caso que 6 sea un divisor de 15 ó que 13 sea un número primo"

   Luego:
   p: 6 es divisor de 15
   q: 13 es número primo.

2. Con la ayuda de tu catedrático/a realiza la construcción de las Tablas de Verdad y determinen el de verdad de las proposiciones compuestas siguientes:

   a) Si la proposición $(\neg p)\vee(\neg q)$ es falsa, entonces se cumple:

   - p es verdadera y q es verdadera.
   - Sólo una es verdadera.
   - p es falsa y q es falsa.

   b) Si la proposición p es verdadera, la proposición $\neg(p\wedge q)$:

   - Puede ser verdadera o falsa dependiendo del valor de verdad de q.
   - Es verdadera.
   - Es falsa.

   Vemos que cuando p es verdadera, $\neg(p\wedge q)$ puede ser verdadera o falsa dependiendo del valor de verdad de q. Cuando q es verdadera, $\neg(p\wedge q)$ es falsa. Cuando q es falsa, $\neg(p\wedge q)$ es verdadera.

   c) ¿Qué valor de verdad toma la proposición $(\neg(p\wedge q))\vee r$ cuando p es verdadera y q es falsa?

   - Verdadera
   - Es falsa.
   - Depende del valor de r.

Realiza estos ejercicios en tu cuaderno, y preséntalo a tu catedrático/a para su ponderación.

Realiza en Casa.

a) Responde en tu cuaderno las siguientes preguntas:

Si p ^ q es verdadera y p es verdadera, entonces q debe ser…

Si ~ (p v q) es verdadera, ¿Cuáles deben ser los valores de verdad de sus proposiciones componentes?

b) Elabora una tabla de verdad para cada una de las proposiciones compuestas siguientes:

1. Si p es falsa, la proposición $p \rightarrow q$ es:

   a. Verdadera.
   b. Falsa.
   c. Su valor de verdad depende del valor de verdad de q.

Recordemos la definición del condicional: El condicional p → q solamente es falso cuando p es verdadero y q es falso; en los demás casos p → q es verdadero.

Realiza la Tabla de Verdad.

2. ¿Qué valor de verdad toma la proposición (¬p) → (¬q) cuando la proposición p es falsa?

a. Es verdadera.
b. Es falsa.
c. Su valor de verdad depende del valor de verdad de q.

Realiza la Tabla de Verdad.

3. ¿Qué valor de verdad toma la proposición (¬p) → q cuando la proposición p es falsa?

a. Es verdadera.
b. Es falsa.
c. Depende del valor de verdad de q.

Realiza la Tabla de Verdad.

Debes realizar estos ejercicios en hojas carta/blanco y con su respectiva identificación, entrega a tu catedrático/a para su ponderación.

CUANTIFICADORES

En Lógica Matemática, Teoría de Conjuntos y Matemática en general, los **cuantificadores** son símbolos utilizados para indicar cuántos o qué tipo de elementos de un conjunto dado cumplen con cierta propiedad (por ejemplo, pertenencia, equivalencia u orden). Existen muchos tipos de cuantificadores, entre los más utilizados están:

Cuantificador Universal

$\forall\, x, y \ldots$ Para todo x, y…

Cuantificador existencial

$\exists\, x, y \ldots$ Existe al menos un x, y…

Cuantificador existencial único

$\exists!\, x, y \ldots$ Existe exactamente un x, y…

Negación del cuantificador existencial

$\nexists\, x, y \ldots$ No existe ningún x, y…

DECLARACIONES CUANTIFICADAS

Las declaraciones cuantificadas se escriben en la forma:

$$\forall x \in \mathrm{R}, 2x \in \mathrm{R}$$

Para todo **x** que pertenece a **R**, se cumple que **2x** pertenece a **R**.

$$\forall a \in \mathrm{R}, \exists x \in \mathrm{R}: a < x < (a+1)$$

Para todo **a** que pertenece a **R**, existe **x** que pertenece a **R**, que está comprendido entre **a** y **a+1**.

$$\forall a \in \mathrm{R} - \{0\}, \exists! x \in \mathrm{R}: a \cdot x = 1$$

Para todo **a** que pertenece a **R** diferente de cero, existe un único **x** que pertenece a **R**, que cumple que **a** por **x** es igual a **1**.

PROPOSICIONES Y CUANTIFICADORES

Cuantificación universal. El cuantificador universal se utiliza para afirmar que *todos* los elementos de un conjunto cumplen con una determinada propiedad. Por ejemplo:

$\forall x \in A : P(x)$ Para todo **x** perteneciente a **A**, se cumple **P(x)**.

Esta afirmación suele usarse como la equivalente de la proposición siguiente:

$A = \{x \in U : P(x)\}$ Se define el conjunto **A**, como el de los elementos **x** de **U**, que cumplen **P(x)**.

Cuantificación existencial. El cuantificador existencial se usa para indicar que hay uno o más elementos en el conjunto A (no necesariamente único/s) que cumplen una determinada propiedad. Se escribe:

$\exists x \in A : P(x)$ Existe **x** en **A** que cumple **P(x)**.

Esta proposición suele interpretarse como la equivalente de la proposición siguiente:

$\{x \in A : P(x)\} \neq \emptyset$ El conjunto de los elementos **x** de **A**, que cumplen **P(x)** es distinto del conjunto vacío.

Cuantificación existencial única. El cuantificador existencial con marca de unicidad se usa para indicar que hay un único elemento de un conjunto A que cumple una determinada propiedad. Se escribe:

$\exists ! x \in A : P(x)$ Existe una única **x** elementos de **A**, que cumple **P(x)**.

Equivalencias

Se tienen las siguientes relaciones universales:

$\forall x \in A : P(x) \leftrightarrow \neg \exists x \in A : \neg P(x)$ Si: para todo **x** de **A** se cumple **P(x)**, es equivalente a: no existe **x** en **A** que **no** cumpla **P(x)**.

$\exists x \in A : P(x) \leftrightarrow \neg \forall x \in A : \neg P(x)$ Si: existe **x** en **A** que cumple **P(x)**, es equivalente a: **no** para todo **x** de **A**, **no** se cumple **P(x)**.

En cuanto al cuantificador existencial único puede considerarse una extensión por definición en un lenguaje formal con igualdad teniendo dada la equivalencia:

$$\exists ! x \in A : P(x) \leftrightarrow \exists z \in A \; \forall x, y \in A : P(z) \wedge (P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y)$$

Si: existe un único **x** en **A** que cumple **P(x)**, es equivalente a: para todo **x**, **y** de **A**, que cumple **P(x)** y **P(y)**, entonces **x** es igual a **y**.

Las expresiones:

Todo hombre es mortal.
Algunos hombres son sabios.

Pueden traducirse respectivamente como:

Para todo x, si x es hombre entonces x es mortal.
Existe un x, tal que x es hombre y x es sabio.

Otros giros utilizados para la expresión "para todo x", son:

Todo x
Cualquiera x
Cada x

que se simbolizan por "$\forall$x" y se llama *cuantificador universal.*

Otros giros utilizados para la expresión "Existe un x" son:

Hay x
Existe x, tal que
Algún x
Algunos x

Que se simbolizan por "$\exists x$" y se llama cuantificador existencial.

Existen tres formas de convertir una función proposicional P(x) en una proposición a saber:

- ✓ Haciendo la sustitución de las variables por un término específico.
- ✓ Anteponiendo la expresión "para todo x" o cuantificador universal.
- ✓ Anteponiendo la expresión "existe al menos un x" o cuantificador existencial.

El enunciado "existe almenos un x tal que P(x)" se representa como:

$\exists x P(x)$ (x es ligada al cuantificador)

El enunciado "para todo x, P(x)" se representa como:

$\forall x P(x)$ (x es ligada al cuantificador)

$\forall x P(x)$ es verdadera cuando todos los x1, x2,..., xn se cumplan en $P(x1) \wedge P(x2) \wedge \ldots P(xn)$ es verdadero.

$\exists x P(x)$ es verdadero cuando al menos un caso x1, x2,..., xn se cumplan en $P(x1) \vee P(x2) \vee \ldots$

P(xn) es verdadero.

Ejemplo:

Todo estudiante de esta clase ha estudiado cálculo.

P(x) : "x es estudiante de la clase de MDI"
Q(x) : "x ha estudiado cálculo"

$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

P(x): "x + 1 > x" es verdadera la proposición $\forall x P(x)$, cuál es el universo del discurso donde es verdadero.
Q(x): "x < 2" es verdadera la proposición $\forall x Q(x)$ el universo de los reales.
P(x): "x*x <10" cuál es el universo del discurso donde es verdadero.

Todos los alumnos son estudiosos

($\forall$ x) (A(x) $\rightarrow$ E(x)) donde el predicado A significa alumno, E estudioso y x es un elemento de un dominio general que podría ser el de las personas o cualquier subconjunto deseado.

EJERCICIO 06. Desarrolla en tu cuaderno lo siguientes.

1. Todo estudiante de la EISC tiene un computador o existe un estudiante que tiene un computador y x y y son amigos.
2. $\exists x \forall y \forall z (((f(x,y) \wedge f(x,z) \wedge (x <> z) \rightarrow \neg f(x,z)))$. f(x,y) : " x es amigo de y".
3. $\forall x \forall y (x + y = y + x)$
4. $\forall x \exists y (x + y = 0)$
5. $\forall x \forall y \forall z (x + (y + z) = (x + y) + z)$
6. Algún estudiantes de esta clase visitará Cali y cada estudiante de esta clase visitará Medellín o Cali.
7. Todo tenemos exactamente un mejor amigo.
8. Si m es un entero par, entonces m + 7 es impar.
9. Para cada número real epsilon > 0 existe un número real delta > 0 tal |f(x) - L| < épsilon cada vez que 0 < |x-a|< delta.
10. Todos los leones son fieras.
11. Algunos leones no toman café.

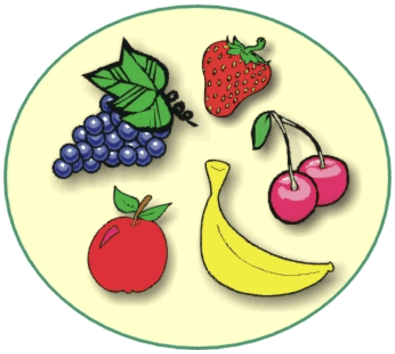
12. Algunas criaturas salvajes no son de África.
13. Algunos números negativos no son enteros.
14. Algunos gobiernos no respetan la libertad.
15. Si todo es rojo, hay algo rojo.

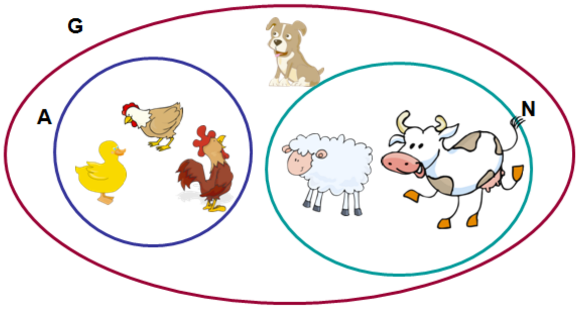
LOS CONJUNTOS

CONJUNTO

Hacemos referencia a conjunto como la agrupación de elementos que tienen una característica en común; están representados dentro de un círculo o cualquier otra figura geométrica cerrada.

A=





A = {pato, gallina, gallo} y N = {vaca, oveja}

Elemento de un Conjunto: son las letras, números u otros objetos que se encuentran agrupados con otros y comparten una característica en común.

Una forma usual de representar conjuntos (de forma descriptiva) es con los elementos separados por comas entre llaves. Cuando todos sus elementos pueden ser enumerados.

Por ejemplo: A = {1, 2, 3, 4, 5}. Es costumbre representar a los conjuntos utilizando mayúsculas y minúsculas para los elementos.

En base a la cantidad de elementos que tenga un conjunto, estos se pueden clasificar en conjuntos **finitos** e **infinitos**.

Conjuntos finitos: son aquellos que contienen un número conocido de elementos, es decir, se encuentran determinados por su longitud o cantidad. El conjunto de días de la semana.

Conjuntos infinitos: son aquellos en los cuales no podemos determinar su longitud. El conjunto de los números reales que existe.

REPRESENTACIÓN DE LOS CONJUNTOS

DIAGRAMA DE VENN

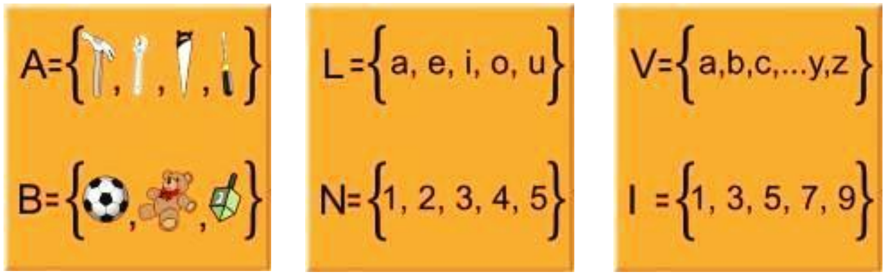
Corresponde a la presentación de cada uno de los elementos de un conjunto agrupados o encerrados en un círculo (o cualquier figura cerrada).

La representación gráfica se completa asignando una letra mayúscula como se observa en los siguientes ejemplos.

ENUMERACIÓN DE LOS COJUNTOS

Es aquella en que los elementos del conjunto se representan agrupados por una llave y separados por comas.

Una letra mayúscula y el signo de igualdad (=), deben preceder al conjunto como se observa en los siguientes ejemplos.



REPRESENTACIÓN LITERAL

Este tipo de representación no incluye gráficos, los conjuntos están asociados con una letra mayúscula y el signo de igualdad, de la misma forma que en la representación por enumeración. Luego, se presenta una oración que describe la característica que agrupa a los elementos de conjunto como se muestra en los ejemplos.

A = días de la semana
B = Conjunto de vocales
C = Números del 1 al 9
M = Meses del año

TIPOS DE CONJUNTOS

Conjunto Vacío. Es aquel conjunto que carece de elementos.

Conjunto Unitario. Es aquel que tiene un solo elemento.

Conjunto Universo: Es aquel en el que sus elementos están agrupados por una característica muy general y dentro de este conjunto los mismos elementos pueden ser reagrupados por características más particulares. A estas reagrupaciones internas, se las denomina **sub-conjuntos**. Un ejemplo, es el conjunto universo de los guatemaltecos.

El número de elementos de este conjunto se puede contar pero no sería práctico hacer su representación gráfica o por enumeración. Algunos de los Sub-conjuntos serían por ejemplo el conjunto de los habitantes de Quetzaltenango (quezaltecos), los habitantes de Huehuetenango (huehuetecos), los habitantes del Petén (peteneros),...

Conjunto Universo	Sub-conjuntos
C = {guatemaltecos}	**F =** {quezaltecos}
	G = {huehuetecos}
	H = {peteneros}

Observa que podemos representar gráficamente al conjunto Universo "guatemaltecos" en una gran figura cerrada, donde encontramos los subconjuntos en figuras geométricas más pequeñas.

EJERCICIO 07: escribe 20 ejemplos de conjunto vacío por medio de representación literal. *En el ejemplo 0) se describe un conjunto que conforme a su inexistencia, se interpreta como conjunto vacío*.

0) A = {todos los cuadrúpedos de 5 patas}.

EJERCICIO 08: escribe 20 ejemplos de conjunto unitario de forma enumerativa.

EJERCICIO 09: realiza 15 ejemplos de conjunto unitario por medio de diagramas de Venn.

EJERCICIO 10: escribe 10 ejemplos de conjunto universo por medio de representación literal. Escribe 2 subconjuntos de cada conjunto universo de los conjuntos anteriores.

EJERCICIO 11. Realiza los 5 ejemplos de conjunto universo y subconjuntos, por medio de diagramas de Venn.

OPERACIONES DE CONJUNTOS

INCLUSIÓN Y NO INCLUSIÓN DE CONJUNTOS

La inclusión, se realiza entre conjuntos y subconjuntos, y señala si un subconjunto forma parte de un conjunto.

Por ejemplo tenemos una granja en la que existe un conjunto de caballos. Este conjunto a su vez tiene un subconjunto de caballos de color negro, otro de caballos de color blanco y otro formado por caballos de color café.

Para este ejemplo, la relación de inclusión será como sigue:

El subconjunto de caballos blancos está incluido en el conjunto de caballos de la granja (el **subconjunto B** está incluido en el **conjunto G**).

El subconjunto de caballos negros está incluido en el conjunto de caballos de la granja (el **subconjunto N** está incluido en el **conjunto G**).

El subconjunto de caballos color café está incluido en el conjunto de caballos de la granja (el **subconjunto C** está incluido en el **conjunto G**).

El símbolo de no inclusión determinará que un subconjunto no pertenece a un conjunto. Para el mismo ejemplo de los caballos de la granja, tendremos que no está incluido el conjunto de las vacas.

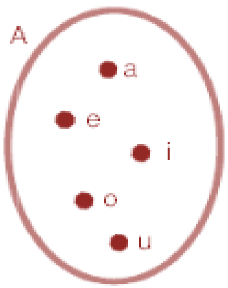
Los símbolos de inclusión y no inclusión permiten anotar matemáticamente si un subconjunto está o no dentro de otro conjunto.

RELACIÓN DE PERTENENCIA DE UN CONJUNTO

La relación de pertenencia **∈**; cumple la condición de que dado un elemento **x** del universo y un conjunto cualquiera **A**, **x** pertenece a **A** es una proposición lógica o sea que siempre es verdadera o falsa, cuando es verdadera se representa: **x ∈ A**, *esto quiere decir que el elemento "x" pertenece al conjunto A*. Cuando es falsa se utiliza **x ∉ A**, *y quiere decir que el elemento "x" no pertenece al conjunto A*.

Ejemplo de pertenencia:

A = {a, e, i, o, u}

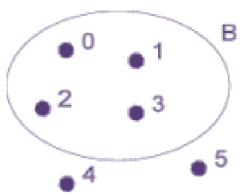


Decimos que:

a∈ A
e∈ A
i∈ A
o∈ A
u∈ A

Ejemplo de no pertenencia:

B = {0; 1; 2; 3}



Decimos que:

4∉ B
5∉ B

IGUALDAD DE CONJUNTOS

Se dice que 2 conjuntos A y B son iguales cuando ambos tienen los mismos elementos, es decir si cada elemento de A pertenece a B y si cada elemento que pertenece a B pertenece también a A.

La igualdad se denota A = B.

En la igualdad, el orden de los elementos de cada conjunto no importa.

A = {1, 2, 3, 4} C = {1, 2, 3, 3, 4, 1} E = {vocal de la palabra mundo} B = {3, 4, 1, 2} D = {1, 2, 2, 3, 4, 4,} F = {u, o}

Las igualdades son:

A = B
C = D
E = F

EJERCICIO 12: se te presentan a continuación varios conjuntos de forma enumerativa. Coloca en el espacio en blanco, el signo que corresponda en cada inciso.

Los signos a colocar son: pertenece y no pertenece, contenido o no contenido, igual y no igual.

A = {uva, banano, pera**}** **B = {**1, 2, 3, 4, 5**}** **C = {**1, 2, 3**}**
D = {a, e, i, o, u**}** **E = {**n, a, n, o**}** **F = {**sol, luna, estrella**}**
G = {b, a, n, a, n, o,**}** **H = {**sandía, limón**}** **I = {**perro, gato, conejo**}**
J = {pelota, raqueta, casco, guante**}**

1) a ___ A **2)** A ___ B **3)** C ___ B **4)** sol ___ F **5)** E ___ G **6)** D ___ G
7) 3 ___ B **8)** u ___ D **9)** 5 ___ B **10)** F ___ C **11)** piña ___ H **12)** perro ___ I
13) pelota ___ J **14)** E ___ D **15)** C ___ B

UNIÓN DE CONJUNTOS

La **unión** de dos o más conjuntos es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a ambos conjuntos. La unión de A y B se denota: **A U B.**

La unión de conjuntos se define como:

$$\mathbf{A \cup B} = \{x \,/\, x \in A \vee x \in B\}$$

La unión de A y B, es el conjunto de elementos x de U, tal que, x pertenezca a A, o que, x a pertenezca a B. La unión de conjuntos puede representarse de forma descriptiva y forma gráfica.

Se tienen 2 conjuntos:

A = {elementos de A} y B = {elementos de B}

Se opera la unión de estos. Denotado A U B.

Entonces, A U B = {elementos de A, elementos de B}

Ejemplo:

Dado los conjuntos:

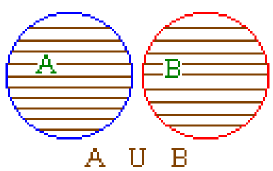
A = {0, 1, 2, 3} y B = {2, 3, 4, 5}.

Hallar A U B.

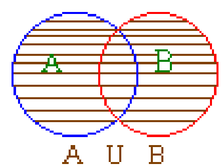
Solución: Unir es formar un nuevo conjunto que contiene todos los elementos de los conjuntos que participan.

En este caso: A U B= {0,1, 2, 3, 4, 5}

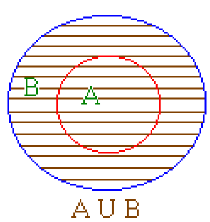
Los elementos repetidos se ponen una sola vez. En la representación gráfica se muestran 3 casos:



Cuando no tienen elementos comunes.



Cuando tienen algunos elementos comunes.



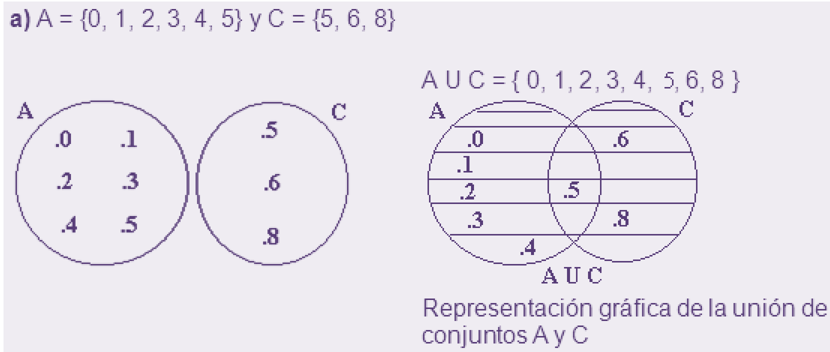
Cuando todos los elementos de un conjunto pertenecen a otro conjunto.

Por ejemplo:

Dados los conjuntos: A = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, B = {0, 2, 4} y C = {5, 6, 8}, efectuar y construir los diagramas respectivos:

a) A U C

Tenemos:



Representación gráfica de la unión de conjuntos A y C

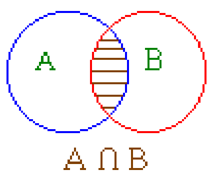
EJERCICIO 13. Con los mismos conjuntos del ejemplo anterior, realiza la unión de conjuntos: **b)** B U C y **c)** A U B.

INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

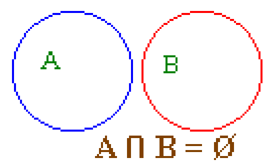
Se define la intersección de dos conjuntos A y B al conjunto de elementos que son comunes a A y B. Se denota por A ∩ B, que se lee: A intersección B.

La intersección de A y B también se puede definir:

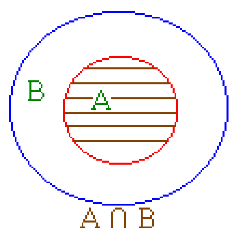
A ∩ B = {x / x ∈ A y x ∈ B} y mediante un diagrama de Venn-Euler:



Cuando tienen elementos comunes.



Cuando no tienen elementos comunes.



Cuando todos los elementos de un conjunto pertenecen a otro conjunto.

Por ejemplo:

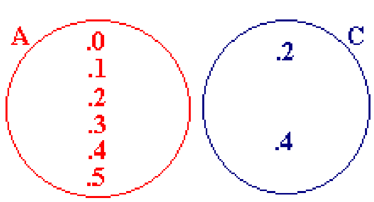
Dados los conjuntos: **A =** {0, 1, 2, 3, 4, 5 } y **C =** {2, 4},

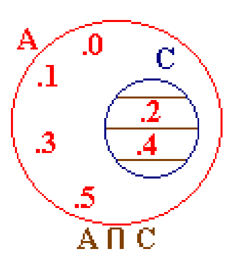
a) A ∩ C

Tenemos:

a) A = {0, 1, 2, 3, 4, 5 } y C = {2, 4}

A ∩ C = {2, 4}





Representación gráfica de la intersección de conjuntos A y C

EJERCICIO 14: realiza las siguientes operaciones de intersección de conjuntos:

b) B $\cap$ C **c)** A $\cap$ B

DIFERENCIA DE CONJUNTOS

Sean A y B dos conjuntos. La diferencia de A y B se denota por A-B y es el conjunto de los elementos de A que no están en B y se representa por:

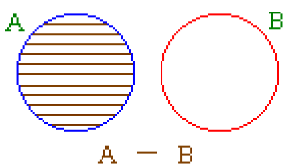
$$A - B = \{x \,/\, x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Ejemplo:

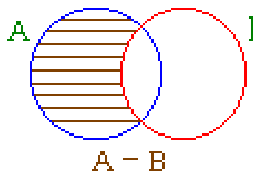
Sea A= {a, b, c, d} y B= {a, b, c, g, h, i} A – B = {d}

En el ejemplo anterior se observa que solo interesan los elementos del conjunto A que no estén en B. Si la operación fuera B - A el resultado es B – A = {g, h, i}

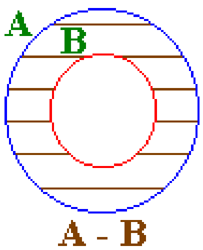
E indica los elementos que están en B y no en A. Expresada la diferencia de conjuntos en diagramas de Venn-Euler. Mostrando 3 casos a continuación:



Cuando no tienen elementos comunes.



Cuando tienen elementos comunes.



Cuando todos los elementos de un conjunto pertenecen a otro conjunto.

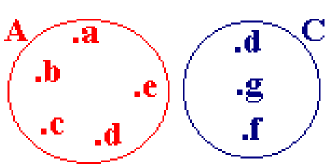
Dados los conjuntos: A = {a, b, c, d, e}, B = {a, e} y C = {d, f, g}, efectuar y construir los diagramas respectivos:

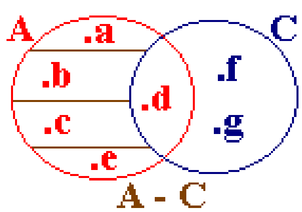
a) A - C

Tenemos:

a) A = {a, b, c, d, e} y C = {d, f, g}

A - C = {a, b, c, e}





Representación gráfica de la diferencia de conjuntos A y C

EJERCICIO 15: realiza en tu cuaderno las siguientes operaciones de diferencia de conjuntos:

b) B - C **c)** A - B

COMPLEMENTO

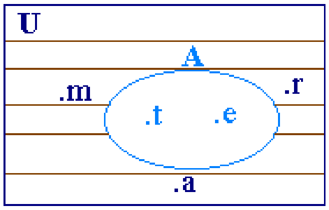
Si un conjunto A es subconjunto de otro conjunto universal U, *al conjunto A'* formado por todos los elementos de U pero no de A, se llama *complemento de A* con respecto a U. Simbólicamente se expresa:

$$A' = \{x/x \in U \text{ y } x \notin A\}$$

a) Sean: U = {m, a, r, t, e} y A = {t, e}

Su complemento de A es: A' = {m, a, r}

En forma gráfica:



EJERCICIO 16: realiza en tu cuaderno el complemento de los siguientes conjuntos:

Sean U = {letras de la palabra aritmética} y B = {vocales de la palabra vida}

DIFERENCIA SIMÉTRICA DE CONJUNTOS

La diferencia simétrica de conjuntos es una operación binaria, en la cual dos conjuntos cualesquiera, **A** y **B**, especifican cuales son los elementos que no son comunes formando así un nuevo conjunto llamado Diferencia Simétrica.

La simbología de la Diferencia Simétrica se representa a través de: ***D*.**

Entonces, diferencia simétrica del conjunto **A** y el conjunto **B**, se representa como: **A *D* B.**

Operación de la diferencia simétrica de conjuntos de forma descriptiva:

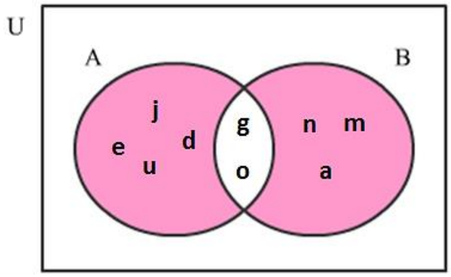
Sean dos conjuntos A y B.

Sea A definido así: A = {j, u, g, o, d, e}

Sea B definido así: B = {m, a, n, g, o}

La diferencia simétrica posible se representa así:

U = A*D*B = {j, u, d, e, m, a, n}



Representación gráfica a través de diagramas de Venn de la operación de diferencia simétrica de conjuntos:

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, su diferencia simétrica estará representada por el área rellenada de color:

Gráficamente esta área cubre la superficie que A y B no comparten mutuamente, es decir el área total cubierta, excluyendo el área común o compartida.

EJERCICIO 17:

1) Realiza por medio de Diagramas de Venn Encuentra las siguientes diferencias simétricas:

1.1) A∆B, **2.1)** C∆D, **3.1)** A∆C, **4.1)** A∆D, y **5.1)** B∆D.

Utiliza los siguientes conjuntos: **A =** {a, 1, b, 2, c} **B =** {1, 2, 3, 4} **C =** {a, e, i, o, u} **D =** {a, b, c, 1, 3}

Con los conjuntos que se te presentan a continuación, realiza las operaciones que indica cada inciso (en forma enumerativa.

A = {a, b, c, d**},** **B = {**mango, piña, limón, melón**}**

C = {2, 4, 6, 8, 10**},** **D = {**a, Rosita, Flor, Violeta, c, 3, 7**}**

E = {Flor, María, mango, melón, 2, 8**}**

Con respecto de U, realizar los incisos del 11) al 15).

U = {a, b, c, d, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, Flor, Rosita, Violeta, María, mango, piña, limón, melón**}**

2) Realiza el ejercicio en hojas aparte y preséntaselo a tu catedrático/a, con su respectiva identificación.

1) A U B **2)** A ∩ B **3)** D ∩ E **4)** A – D **5)** C *D* E **6)** B ∩ C **7)** E ∩ B

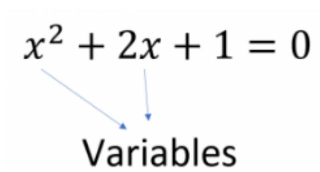
8) C U A **9)** C U B **10)** A U D **11)** A′ **12)** B′ **13)** C′ **14)** D′

15) E′

Nota. Si tu catedrático(a) desea que realices de forma gráfica cada uno de las operaciones anteriores, te lo pedirá como parte del ejercicio que realizarás en casa.

VARIABLES

En matemáticas, es una letra que representa un valor numérico. Este valor puede ser conocido o desconocido.



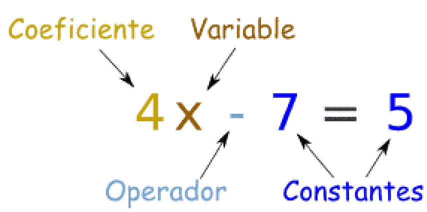
Por ejemplo, x + 1 = 2, aquí "x" es una variable cuyo valor es 1.

Una variable puede ser dependiente o independiente.

Es independiente cuando este no depende de otras variables. Mientras que una variable dependiente, depende de una o más. Por ejemplo, en la ecuación cuadrática **y = x² + 1**. Aquí, la letra "y" está en función de x. La letra "y" además es una variable dependiente, cuyo valor depende de los valores que tome "x". Mientras que "x" es independiente, ya que "x" puede tomar cualquier valor.

Un símbolo para un número que aún no sabemos. Es normalmente una letra como x o y.

Si no es una variable se la llama constante.



DEFINICIÓN APROPIADA DE UNA VARIABLE

Una variable, es una cantidad que puede cambiar no solamente en su valor numérico, sino también, el concepto de la misma, dependiendo dentro del contexto del problema o experimento matemático que sea utilizada. Típicamente, usa una sola letra para representar una variable. En el caso que se use dos o más, también se debe definir si es, dependiente o independiente.

Ejemplos de variables dependientes e independientes:

Con una variable:

$$x + 2 = 7$$

Con dos o más variables:

$$x + y = 1$$

$$v_f = v_o + at$$

VARIABLES CUANTITATIVAS Y CUALITATIVAS

El término variable, maneja un concepto amplio, como se ve continuación:

Cuantitativas:

Las variables cuantitativas, son aquellas que representan exclusivamente a cantidades. De esta manera, se puede asegurar que, en matemáticas, las variables son cuantitativas, ya que representan, edades, volúmenes, tiempos, medidas y otras. Pueden ser categóricas, discretas o continuas.

1. **Variable cuantitativa categórica.** Contienen, un número determinado por categorías o grupos diferentes. Estos datos, pueden, y no tener un orden lógico. Por ejemplo, incluyen sexo, tipo de material y orden de llegada.
2. **Variable cuantitativa discreta.** Estas, tienen un número contable. Por ejemplo, el número de quejas de los clientes o el número de faltas, número de personas dentro un curso.
3. **Variable cuantitativa continua.** Tienen un número infinito, dentro del intervalo de esta variable. Una variable continua puede ser la fecha, la hora de llegada.

Cualitativas:

En cambio, la variable cualitativa, muestra una peculiaridad de un sujeto, como un adjetivo, o un nombre. Ese es su valor, y su característica es que no se mide con números al contrario se lo califica con otro adjetivo. Se puede catalogar en dos tipos: Variable Cualitativa Ordinal y Variable Cualitativa Nominal o Cuasicuantitativa.

1. **Variable Cualitativa Nominal.** Las variables cualitativas nominales, siempre expresan valores no numéricos. No llevan entre si un criterio de orden. Por ejemplo, el estado de salud es una variable, porque varía así: sano, enfermo, convaleciente. O el estado civil: soltero, casado, divorciado.
2. **Variable Cualitativa Ordinal o Variable Cuasicuantitativa.** Las variables cuasicuantitativas, muestran modalidades no numéricas, en las que siempre existe un orden, como la secuencia de respuestas en una evaluación de calidad: Pésimo, Malo, Regular, Bueno, Excelente.

EJERCICIO 18:

A. En estas oraciones, define que variables son cualitativas y cuales cuantitativas:

1. Pelota grande, es
2. Altura de un edificio, es
3. Área de la cancha de fútbol, es
4. Un trio de alumnos sentados, es
5. El color de cabello de tu mejor amigo, es
6. La mejor nota de tu clase de matemáticas, es

B. Indica cuáles son categóricas, discretas y continuas:

1. Número de personas dentro el asensor es
2. Temperaturas registradas en tu lugar es
3. Período de una mujer es
4. El diámetro del sol es
5. Número de hermanos en tu familia es
6. La hora de salida de tu colegio es

C. Clasificar las siguientes variables, en cualitativas nominal u ordinal.

1. Tu mejor amigo esta triste, es
2. Tu mejor nota es la más alta del curso, es
3. Tu amigo ya tiene novia, es
4. Tu mascota favorita es bonito, es
5. La profesión de una persona, es
6. Tu estado ánimo de hoy es buena, es

RELACIOENES

UN PAR ORDENADO

Un par ordenado es un conjunto de dos elementos donde se tiene prioridad en el orden de dichos elementos; cada uno de esos elementos ocupa una posición fija. El primer elemento se llama "primera componente" o "primera coordenada" y el segundo elemento se denomina "segunda componente" o "segunda coordenada".

Las parejas ordenadas se denotan de manera diferente a la de los conjuntos; pues estos últimos se escriben entre llaves (como se vio en el capítulo de conjuntos) y sin importar el orden; por ejemplo, {x, y} = {y, x} Para diferenciar un conjunto ordenado de un conjunto cualquiera de dos elementos la notación usada de par ordenado es (x, y). En general se tiene:

$$(x, y) \neq (y, x)$$

PROPIEDADES DEL PAR ORDENADO

$$(x, y)=(y, x) \Leftrightarrow x=y$$

$$(x, y)=(m, n) \Leftrightarrow x=m \wedge y=n$$

Ejemplo: las siguientes identidades son verdaderas

- $(2, n)=(2, m) \Leftrightarrow m=n$
- $(m, 2)=(3, n) \Leftrightarrow m=3$ y $n=2$
- $(x+4, 7)=(2x-1, 3y+4) \Leftrightarrow x=5$ e $y=1$
- $(2-m,5-n)=(n+2,m+5) \Leftrightarrow$ m es igual al inverso aditivo de n

PRODUCTO CARTESIANO

El nombre de producto cartesiano se dio para conmemorar el nombre de quien lo descubrió: René Descartes Sean A y B conjuntos diferentes del vacío. El producto cartesiano de A y B denotado AxB es el conjunto formado por todas las parejas ordenadas, tales que las primeras componentes son elementos de A y las segundas componentes son elementos de B. Simbólicamente,

AxB = {(x, y)/x E A ^ y E B}

En general se tiene:

$$AxB \neq BxA$$

La definición de producto cartesiano puede generalizarse al producto entre n conjuntos A_1, A_2,..., A_n. En este caso, al conjunto formado por todas las n-adas ordenadas (x_1, x_2,..., x_n) tales que $x_i \in A_i$ con i = 1, 2,..., n, se llama producto cartesiano de A_1, A_2,..., A_n y se denota $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

PROPIEDADES DEL PRODUCTO CARTESIANO

- $AxB = BxA \Leftrightarrow A=B$
- $(x, y) \notin AxB \Leftrightarrow x \notin A \vee y \notin B$
- $A \neq B$ y $AxB \neq \varnothing \Rightarrow AxB \neq BxA$

Ejemplo: dados los conjuntos

A = {2,3,5} y B = {2,4}, entonces:

AxB={(2,2),(2,4),(3,2),(3,4),(5,2),(5,4)} y BxA={(2,2),(2,3),(2,5),(4,2),(4,3),(4,5)}

Ejemplo: sea R el conjunto de los números reales, entonces

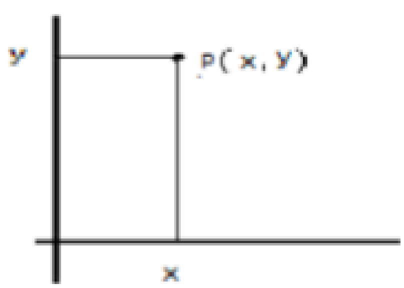
R x R = {(x, y) / x E R ^ y E R}

y se denomina "el conjunto de todas las parejas de números reales".

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL PRODUCTO CARTESIANO

El plano cartesiano tiene diferentes formas de representarlo gráficamente, entre otras las siguientes: plano cartesiano, diagramas sagitales y dígrafos (para relaciones).

Plano cartesiano. También se le llama plano numérico o diagrama cartesiano. Consiste en dos líneas orientadas perpendiculares que se cortan formado cuatro regiones llamadas cuadrantes. Se utiliza para representar geométricamente el conjunto RxR. En este capítulo se estudiará el sistema coordenado rectangular que en estudios previos de álgebra y trigonometría ya les había sido familiar.

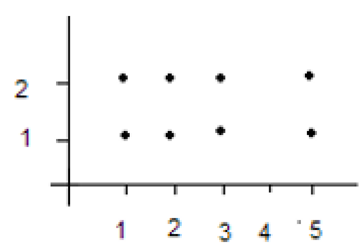


Entre un par ordenado de R x R y el conjunto de los puntos del plano geométrico o plano cartesiano, se establece una relación biunívoca; de tal manera, el par ordenado (x, y) se asocia con el punto P(x, y) del plano (vea figura 4.1).

Ejemplo: dados los conjuntos A = {1, 2, 3, 5} y B = {1, 2}, el producto cartesiano A x B será:

A x B = {(1,1), (1, 2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (5,1), (5,2)}.

Su representación geométrica en el plano cartesiano o diagrama cartesiano puede verse en la siguiente figura.

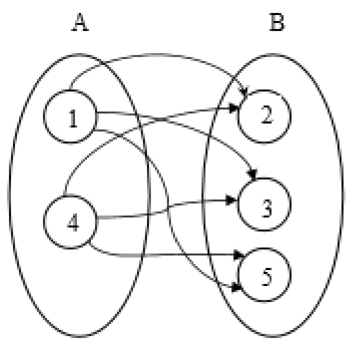


Ejemplo: dados los conjuntos A = {x/x E R ^ x E [2,5]} y B = {x/x E Z ^ x E (0,3]}, represente en el plano cartesiano a AxB. En efecto, en el eje X represente el conjunto A y en el eje Y represente el conjunto B. Observa que por cada valor obtenido en A se obtiene el mismo valor de B; por tal razón, se forma una línea.

DIAGRAMAS SAGITALES

Son muy importantes para la representación de relaciones y de funciones como se verá más adelante. Consisten en figuras geométricas cerradas que también se denominan diagramas de Euler-Venn donde los elementos de cada conjunto se unen con flechas.

Ejemplo: en siguiente la figura se representa el producto cartesiano AxB, con A={1,4} y B={2,3,5}, utilizando diagramas sagitales.



Ejemplo:

sean $A=\{x/x\in R\wedge -1\le x\le 2\}$ y $B=\{y/y\in R\wedge 2\le x\le 4\}$

Determinar y representar en el plano cartesiano a: Ax{0}, {1}xB, AxB y BxA.

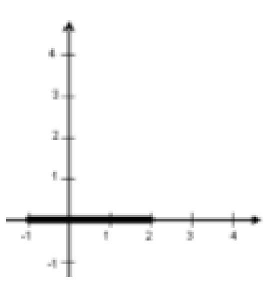
$Ax\{0\}=\{(x,y)/-1\le x\le 2\wedge y=0\}$

$\{1\}xB=\{(x,y)/x=1\wedge 2\le y\le 4\}$

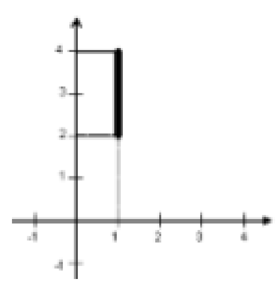
$AxB=\{(x,y)/-1\le x\le 2\wedge 2\le y\le 4\}$

$BxA=\{(x,y)/-1\le x\le 2\wedge 2\le y\le 4\}$

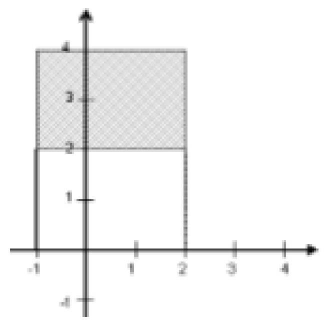
La representación gráfica es:



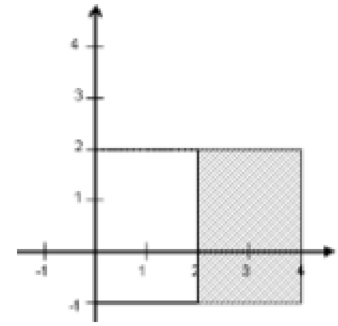
Ax{0}



{1}xB



AxB



BxA

EJERCICIO 19: realiza los siguientes productos cartesianos del inciso A. de forma gráfica utilizando diagramas de Venn.

A = {caballo, perro, vaca, gallina, gato}
C= {Ana, Rosa}

B = {a, e, i, o, u},
D = {2}.

1) A x D. **2)** C x B. **3)** C x D. **4)** D x A. **5)** A x C. **6)** B x B.

7) C x A. **8)** D x D. **9)** D x B. **10)** C x C.

RELACIÓN DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA E INVERSA

PROPORCIÓN

Una proporción es la igualdad de dos razones.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{ó} \quad \underbrace{a : \overbrace{b = c}^{\text{Términos medios}} : d}_{\text{Términos extremos}}$$

Se lee: "a es a b como c es a d"

Propiedad fundamental. En toda proporción, el producto de los términos medios es igual al producto de los términos extremos (Teorema fundamental de las proporciones). Es decir:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{entonces} \quad a \cdot d = b \cdot c$$

Ejemplo: si tenemos la proporción:

$$\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$$

y le aplicamos la propiedad fundamental señalada queda: 3 • 20 = 4 • 15, es decir, 60 = 60.

Esta es la propiedad que nos permite detectar si dos cantidades presentadas como proporción lo son verdaderamente.

PROPORCIONALIDAD DIRECTA

Dos variables (una independiente ***x*** y la otra dependiente ***y***) son directamente proporcionales si el cociente (división) entre los valores respectivos de cada una de las variables es constante.

$$\mathbf{y / x = k}$$

Además al aumentar o disminuir una de ellas, la otra aumenta o disminuye, respectivamente, en la misma razón.

Ejemplo:

Indica si las variables son directamente proporcionales

a. La medida del lado de un cuadrado y su perímetro: Respuesta: **Sí**, porque a mayor longitud de sus lados mayor perímetro. (si una variable aumenta la otra aumenta en la misma razón).
b. El número de trabajadores y los días que se demoran en hacer un trabajo, si todos trabajan de igual manera: *Respuesta:* **No**, porque a mayor cantidad de trabajadores menos cantidad de días. (si una variable aumenta, la otra disminuye en la misma razón).

En el caso de las funciones esta proporcionalidad directa se puede representar como una función de la forma:

$$\mathbf{y = k\,x}$$

Donde:

y : variable dependiente.
x: variable independiente.
k : constante de proporcionalidad.

Por ejemplo: si tenemos la siguiente función:

$$y = 3\,x$$

La constante de proporcionalidad sería 3.

¿Cómo se calcula la constante de proporcionalidad?

Como **y = k x** entonces: **k = y / x**

Calcula la constante de proporcionalidad:

x	3	6	7
y	6	12	14

k = 6 / 3
k = 2

El cociente de las dos magnitudes es siempre el mismo (**constante**)

GRÁFICO DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA

El gráfico correspondiente a una relación de proporcionalidad directa **es una línea recta** que pasa por el punto de origen de un sistema de coordenadas cartesianas.

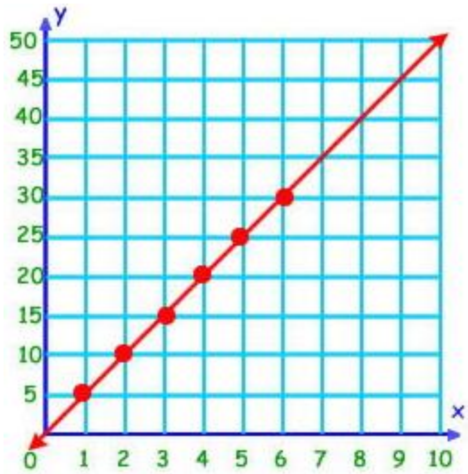
En una función de proporcionalidad directa, si una de las variables aumenta, la otra también aumenta en un mismo factor; y si una de las variables disminuye, la otra disminuye en un mismo factor.

Ejemplo:

Juan ha utilizado 20 huevos para hacer 4 tortillas iguales. ¿Cuántos huevos necesita para hacer 6 tortillas? ¿Y para hacer 2?

Grafica los resultados hasta 6 tortillas.

x	1	2	3	4	5	6
y	5	10	15	20	25	30



Como puedes ver, el gráfico es una línea recta que pasa por el origen. Además si nos fijamos en la tabla, nos podemos dar cuenta que el cociente (división) entre las dos magnitudes (y / x) es constante. En este caso el valor de la constante de proporcionalidad es **5**.

PROPORCIONALIDAD INVERSA

Dos variables (una independiente ***x*** y la otra dependiente ***y***) son **inversamente proporcionales** si el producto entre los valores respectivos de cada una de las variables es constante.

$$(x \bullet y = k)$$

Además, en una función de proporcionalidad inversa, si una de las variables aumenta, la otra disminuye en un mismo factor; y si una de las variables disminuye, la otra aumenta en un mismo factor. Esta relación de proporcionalidad inversa se puede representar como una función de la forma:

$$y = k / x$$

Donde:

y: variable dependiente.
x: variable independiente.
k: constante de proporcionalidad.

Ejemplos:

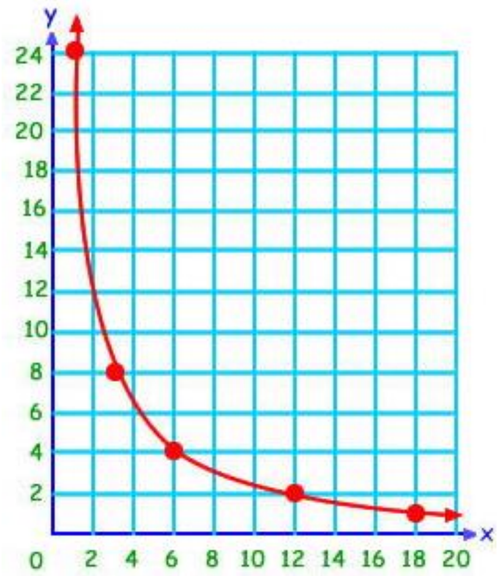
Indica si las variables son inversamente proporcionales.

a) El número de albañiles y el tiempo empleado en hacer el mismo edificio. Respuesta: **Son inversamente proporcionales**, ya que con el doble, triple... número de albañiles se tardará la mitad, tercera parte de tiempo en construir el mismo edificio.
b) La velocidad de un auto y el trayecto recorrido en el mismo tiempo. Respuesta: **No** es inversa ya que a tiempo constante, con el doble o el triple... de la velocidad, el auto recorrerá el doble, triple... de espacio.
c) La velocidad de un auto y el tiempo empleado en recorrer el mismo trayecto. Respuesta: **Son inversamente proporcionales,** ya que, a espacio constante, con el doble, triple... velocidad, el auto tardará la mitad, tercera parte... de tiempo en recorrerlo.

GRÁFICO DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

La representación gráfica de esta función son puntos que pertenecen a una curva, llamada **hipérbola**.

x	3	6	12	1
y	8	4	2	24



INFORMACIÓN (INCLUÍDA EN ESTE DOCUMENTO EDUCATIVO) TOMADA DE:

LIBROS:

1. Chong, Moisés Lecciones de Lógica e Introducción al Método Científico. The Open University LÓGICA I- ALGEBRA DE BOOLE. Curso básico de matemáticas. Unidad II. McGraw-Hill. 1971. Jiménez Murillo Lógica Matemática. Ilustrados.com. José Alfredo y otra autora.

SÍTIOS WEB:

http://www.unicauca.edu.co/matematicas/eventos/log&co/MATERIAL/Elementos_Logica/Textos/Biblioteca/Libros/Libro_015/LogicaMatematica.htm

https://sites.google.com/site/mathematicasdiscretesolutions/logica-de-po/cuantificadores

http://cmap.ihmc.us/docs/QueEsProposicion.html

http://www.edufuturo.com/

http://descartes.cnice.mec.es/descartes2/previas_web/materiales_didacticos/teoria_conjuntos_pdas/conjuntos_5.htm

http://sipan.inictel.gob.pe/internet/av/union.htm (Expresión A U B)

http://es.wikipedia.org/wiki/Uni%C3%B3n_de_conjuntos

http://www.ejemplode.com/29-logica/2381-ejemplo_de_proposiciones.html

http://sipan.inictel.gob.pe/internet/av/union.htm

http://sipan.inictel.gob.pe/internet/av/interseccion.htm

http://colposfesz.galeon.com/est501/conjunto/teoconj.htm

http://sipan.inictel.gob.pe/internet/av/diferencia.htm

http://sipan.inictel.gob.pe/internet/av/complemento.htm

http://ficus.pntic.mec.es/rdis0006/lecciones/logica_proposicional/lecciones/funciones%20veritativas.htm

https://www.disfrutalasmatematicas.com/definiciones/variable.html

https://www.matematicapara.com/algebra-basica/introduccion/que-es-una-variable-en-matematicas/

https://medium.com/@matematicasdiscretaslibro/cap%C3%ADtulo-8-relaciones-19a0432cf7e1

https://www.portaleducativo.net/octavo-basico/806/Relacion-de-proporcionalidad-directa-e-inversa

http://portales.educared.net/wikiEducared/images/4/42/Diferencia_simetrica.gif

http://introduccionalpensmientologico.blogspot.com/2009/09/conectivos-logicos.html

https://infinimath.wordpress.com/2011/10/20/oraciones-abiertas/

http://www.mitecnologico.com/Main/ConjuntosLeyesYRepresentaci%F3n